Nom en lettres majuscules	Prénom en lettres majuscules	Numéro d'identification

Introduction à l'algèbre linéaire (MAT-1200 Nrc 86094)
Examen partiel 1 du 24 Octobre 2023
Durée 2h50.

- Inscrivez votre nom, prénom en MAJUSCULE et le numéro d'identification aux endroits indiqués ci dessus.
- Veuillez éteindre vos téléphones. Déposez vos téléphones et vos montres intelligentes dans vos sacs.
- **Ce sujet comporte 7 questions sur 12 pages + deux feuilles de brouillon.**
- **Sauf mention contraire, toutes les réponses doivent être justifiées**
- Pour répondre aux questions, utilisez le recto des pages 2 à 12. Si vous manquez de place, utilisez le verso.
- Les deux dernières feuilles sont pour faire un brouillon. Vous les détachez du cahier de l'examen. Inscrivez votre nom sur chacune des feuilles. **Il faut les rendre à la fin de l'examen.**
- Documents admis: deux feuilles manuscrites 8 1/2 × 11, recto-verso.
- Seulement les calculatrices autorisées.
- Aucune sortie n'est autorisée pendant l'examen.

Question 1	:	/20
Question 2	:	/16
Question 3	:	/10
Question 4	:	/12
Question 5	:	/18
Question 6	:	/12
Question 7	:	/12

TOTAL: /100

Question 1. (4 + 4 + 4 + 4 + 4 =20 points)

Répondre par **vrai** ou **faux** à chacune des questions suivantes. Justifier brièvement votre réponse.

a) Si le système inhomogène $A\vec{x} = \vec{b}$ est inconsistant, est ce que le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ est inconsistant?

b) Soit A une matrice carrée quelconque. Si A est idempotente est-ce qu'elle est inversible?

c) Soit A une matrice carrée pour laquelle la matrice transposée A^t est inversible. Est-ce que la forme échelon réduite équivalente à A selon les lignes est la matrice identité?

d) Est-ce que 4 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui engendrent l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ forment une base de cet espace vectoriel?

e) Est-ce que L'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b-1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace de l'espace des matrices 2×2?

Exercice 2. (16 points)

Soit la matrice carrée
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Est-ce que la matrice A est inversible? Sinon il faut dire pourquoi? Si oui déterminer par l'algorithme Gauss-Jordan la matrice A^{-1} de la matrice A. Donner les détails du calcul et vérifier votre réponse.

b) Déterminer la matrice X telle que
$$AXA^t + 2B = 0 \quad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Suite de la solution de la question 2)

Question 3. (10 points)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une factorisation LU de la matrice A où L est une matrice triangulaire inférieure ayant des **1** sur la diagonale et U est une matrice triangulaire supérieure. Vérifier que $A = LU$

Question 4. (12 points)

On considère une matrice B telle que

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans cette question il ne faut pas calculer la matrice B.

a) Est-ce que la matrice B est inversible? Justifier votre réponse.

b) Sans calculer la matrice B, **utiliser obligatoirement** la factorisation ci-dessus, pour résoudre l'équation matricielle suivante, d'inconnue X:

$$BX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Question 5. (18 points)

On se donne un système d'équations linéaires d'inconnues x, y et z

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+az &=& 1 \\ x+ay+z &=& 4 \\ ax+y+z &=& b \end{array}\right.$$

dépendant de deux paramètres réels a et b. Après élimination, la matrice augmentée du système est équivalente selon les lignes à la matrice suivante

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & 3 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & a-b-3 \end{array}\right)$$

1) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on

i) une solution unique,

ii) une infinité de solutions,

iii) aucune solution?

2) Résoudre le système si $a = 2$ et $b = 0$.

(Suite de la solution de la question 5)

Question 6. (12 points)

On désigne par A la matrice 4×7 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 7 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 15 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

et par A_e une de ses formes échelon

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Le noyau de la matrice A est un sous-espace vectoriel de quel espace? Quelle est la dimension du noyau de A? Déterminer une base du noyau de la matrice A

b) L'espace colonne de A est un sous-espace vectoriel de quel espace? Quelle est la dimension de l'espace colonne de A? Donner une base de l'espace colonne de A?

c) L'espace ligne de A est un sous-espace vectoriel de quel espace? Quelle est la dimension de l'espace ligne de la matrice A? Déterminer une base de l'espace ligne de A.

(Suite de la solution de la question 6)

Question 7. (12 points)

On considère l'ensemble $E = \{ \vec{u} = (x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2x + 3z = 0 \}$.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que les deux vecteurs $\vec{u}_1 = (1, 2, 0)^t$ et $\vec{u}_2 = (0, -3, 1)^t$ appartiennent à E.

c) Montrer que les deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont linéairement indépendants.

d) Montrer que tout vecteur $\vec{v} = (a, b, c)^t$ de E s'exprime comme une combinaison linéaire de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Quelle est la dimension de E?

(Suite de la solution de la question 7)

Feuille pour brouillon

Nom: ______________________________ **No d'identification**: ________________________

Prénom: ______________________________

Feuille pour brouillon

Nom: ______________________ **No d'identification**: ____________________

Prénom: ______________________